إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية . فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليو م .ويقال أن احتمال نجاح أحمد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح خالد . ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار. ويقال أن من المؤكد موت كل إنسان . ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى الطبيب المعالج ...وهكذا. إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث . ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة حدوث هذه الحوادث . إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد(0-1) . فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد . وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر . ولتعريف الاحتمال فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والحوادث.

١-التجربة العشوائية: : Random Experiment

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
٢. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
٣. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء (فراغ) العينة: : Sample Space

- **فضاء العينة للتجربة العشوائية** هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة .ونرمز لفضاء العينة بالرمز n(S) ويرمز **لعدد عناصر فضاء العينة** بالرمز S.
- **نقطة العينة** هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S.

مثال(٤-١): اوجد فضاء العينة وعدد عناصر التجربة التالية.

١. تجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة وتسجيل الصورة (H).

٢. تجربة رمي قطعتي نقود معاً وتسجيل الصورة لكل قطعة(H).

T H

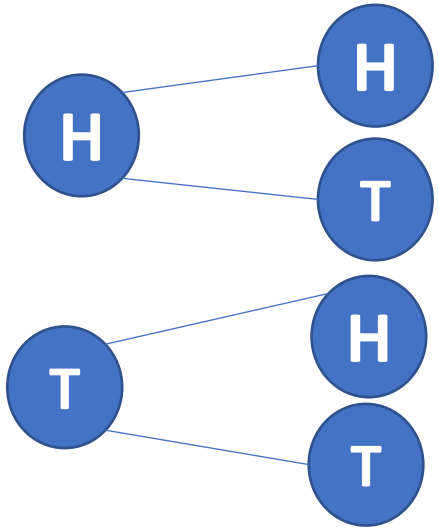
الحل: لنرمز للصورة بـــ H و للكتابة بـــ T. فان النتائج الممكنة هي (H و T) ولذلك فان فضاء العينة هو $S = \{H,T\}$ وعدد عناصر التجربة يساوي n(S)=2.

٢. تجربة رمي قطعتي نقود معاً. فان النتائج الممكنة هي (T,T) و (T,H) و (H,T) و (H,H) لذلك فان فضاء العينة هو

$$S = \{\{H,T\} \times \{H,T\}\} = \{(H,H)\ ,\ (H,T)\ ,\ (T,H)\ ,\ (T,T)\}$$

وعدد عناصر يساوي 4

باستخدام قاعدة الضرب $n(S)=2 \times 2=4$



مثال(٤-٢) اوجد فضاء العينة وعدد عناصر التجربة الاتية:

١. رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.
٢. رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:

١. تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة.

ان النتائج الممكنة هي 1و 2و 3 و4و 5 و6 ولذلك فان فضاء العينة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ وعدد عناصر العينة n(S)=6

٢.تجربة رمي النرد مرتين:

يمكن ايجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق نذكر منها طريقة حاصل الضرب الديكارتي و طريقة الشجرة وطريقة الشبكة او الجدول.

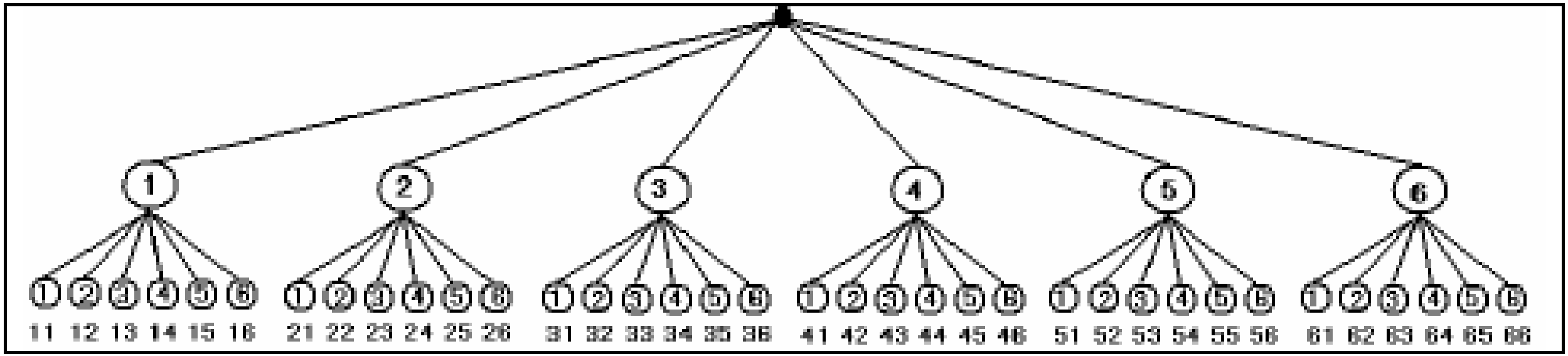
اولا: طريقة الضرب الديكارتي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

S(n)=6*6=36

ثانيا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



ثالثا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

نتيجة الرمية الثانية						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

الحادثة أو الحدث: Event:

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S.

- A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A \subseteq S$.
- يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

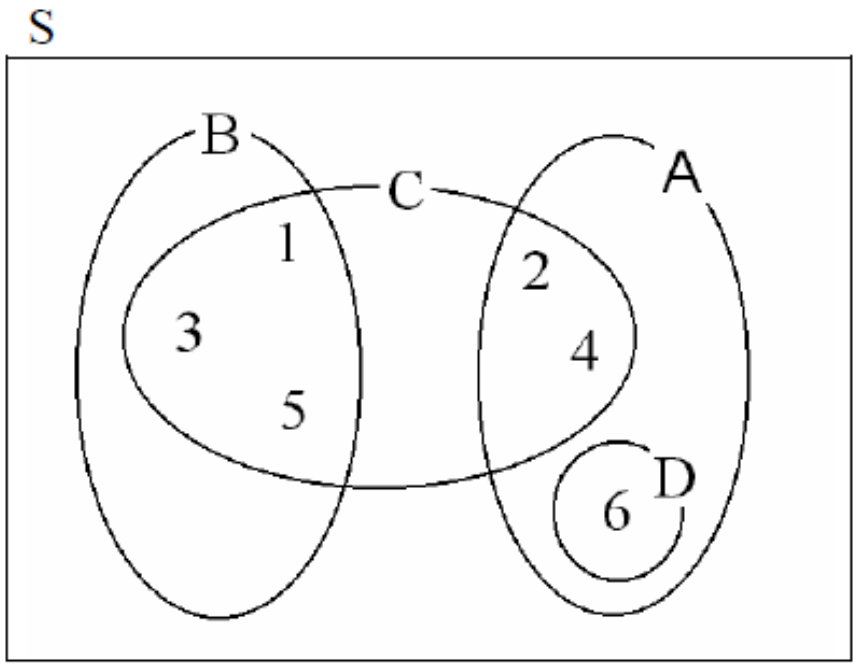
- الحادثة المستحيلة $\phi \subseteq S$. (Impossible Event) حيث أن ϕ هي المجموعة الخالية.
- الحادثة المؤكدة $S \subseteq S$. (Sure Event)
- يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز n(A). ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

مثال 3-4

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S.

عدد العناصر	الحادثة	
$n(A) = 3$	$A \subseteq S$	$A =$ { ظهور عدد زوجي } $= \{2, 4, 6\}$;
$n(B) = 3$	$B \subseteq S$	$B =$ { ظهور عدد فردي } $= \{1, 3, 5\}$;
$n(C) = 5$	$C \subseteq S$	$C =$ { ظهور عدد أقل من ستة } $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$n(D) = 1$	$D \subseteq S$	$D =$ { ظهور العدد ستة } $= \{6\}$;
$n(\phi) = 0$	$\phi \subseteq S$	$\phi =$ { ظهور عدد سالب } $= \{\ \}$;
$n(S) = 6$	$S \subseteq S$	$S =$ { ظهور عدد موجب } $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

في هذا المثال يمكن أم نمثل الحوادث بأشكال فالشكل التالي يمثل الحـــوادث A و B و C و D:



في هذا المثال:

نقول بأن الحادثة $A=\{2,4,6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6.

نقول بأن الحادثة $D=\{6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6.

وهكذا...

مثال 4-4

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال وذلك في تجربة رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

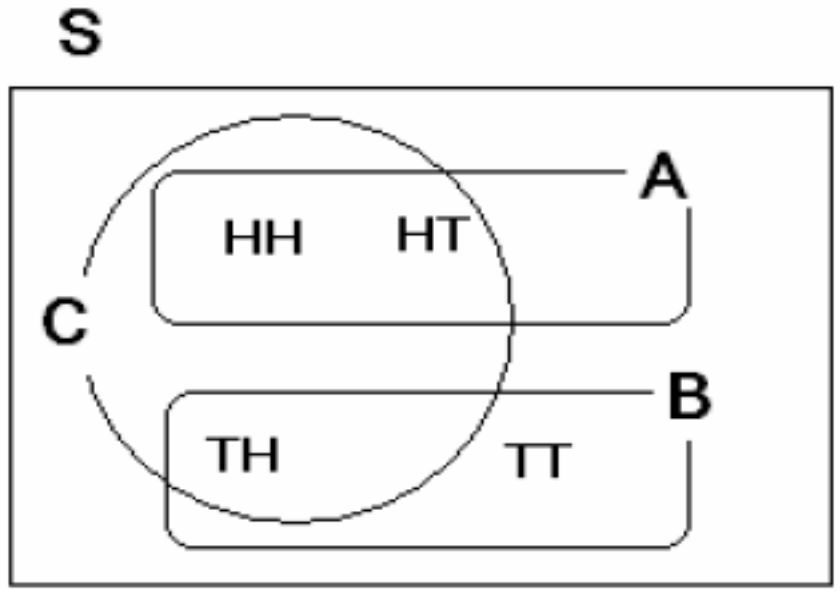
الحل:

$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$; $n(S)=4$

$A = \{(H,H),(H,T)\}$; $n(A) = 2$

$B = \{(T,H),(T,T)\}$; $n(B) = 2$

$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\}$; $n(C) = 3$



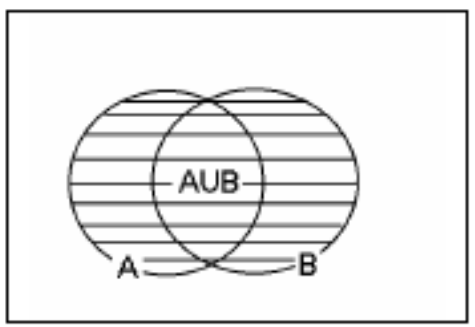
العمليات على الحوادث (جبر الحوادث): Algebra of Events:

بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث. وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

(أ) اتحاد حادثتين: Union

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معًا. وتقع الحادثة $A\cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معًا.

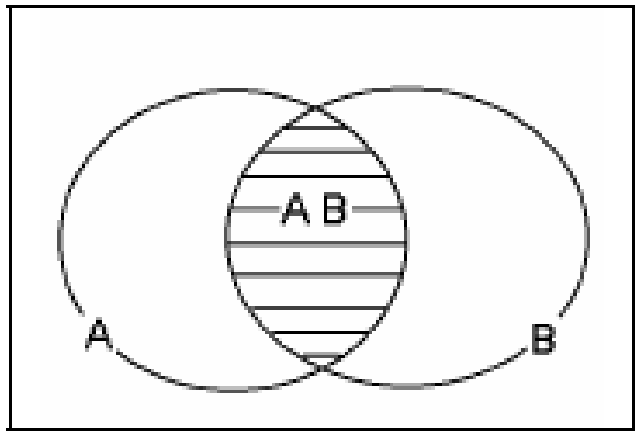
$$A\cup B = \{x \in S: x\in A \text{ أو } x\in B\}$$



(ب) تقاطع حادثتين: Intersection

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معًا. وتقع الحادثة $A\cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معًا في نفس الوقت.

$$A\cap B = \{x \in S: x\in A \text{ و } x\in B\}$$



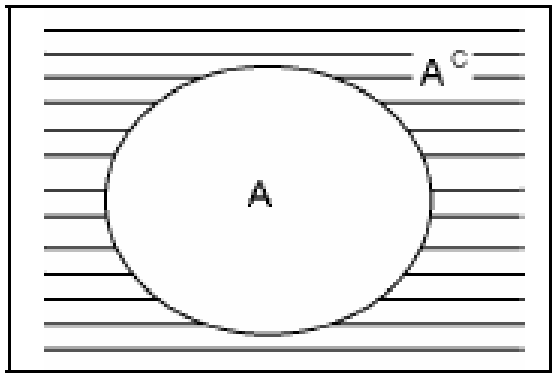
(ج) متممة أو مكملة حادثة: Complement

متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. وتقع متممة الحادثة $\overline{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

$$\overline{A} = A^c = \{x \in S: \ x \notin A\}$$

لاحظ أن:

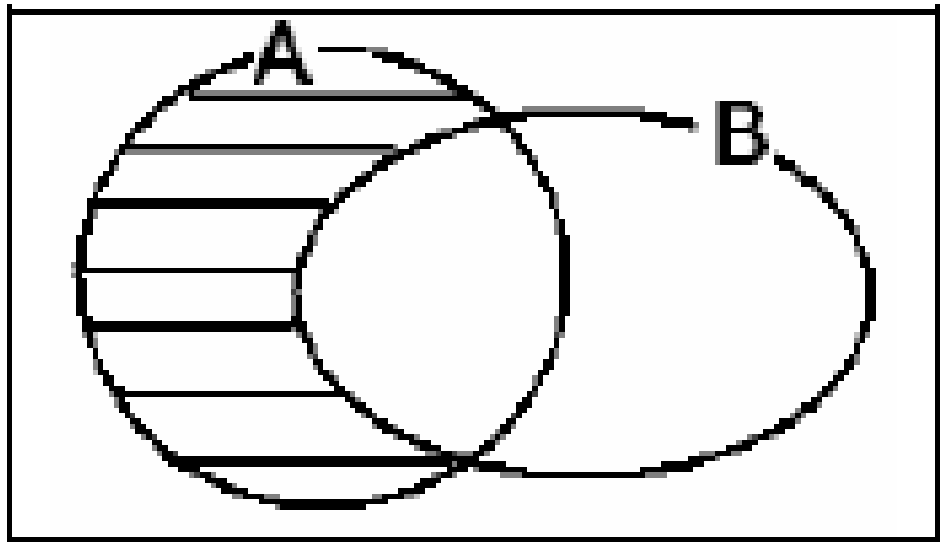
$$n(A^c) = n(S) - n(A)$$



(د) الفرق بين حادثتين: Difference between Two Events:

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز A–B وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B. وتقع الحادثة A–B إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

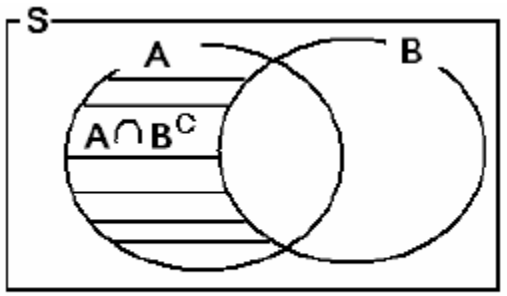
$$A-B = \{x \in S:\ x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



نتائج:

- $(A^C)^C = A$
- $S^C = \phi$
- $\phi^C = S$
- $A^C = S - A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap S = A$
- $A \cup S = S$
- $A \cap \phi = \phi$

- $A \cup \phi = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



$A - B = A \cap B^C$

نتيجة:

- $A - B = A \cap B^C$

نتيجة: قانونا دي مورجان:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مثال 5-4

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

١. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

٢. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

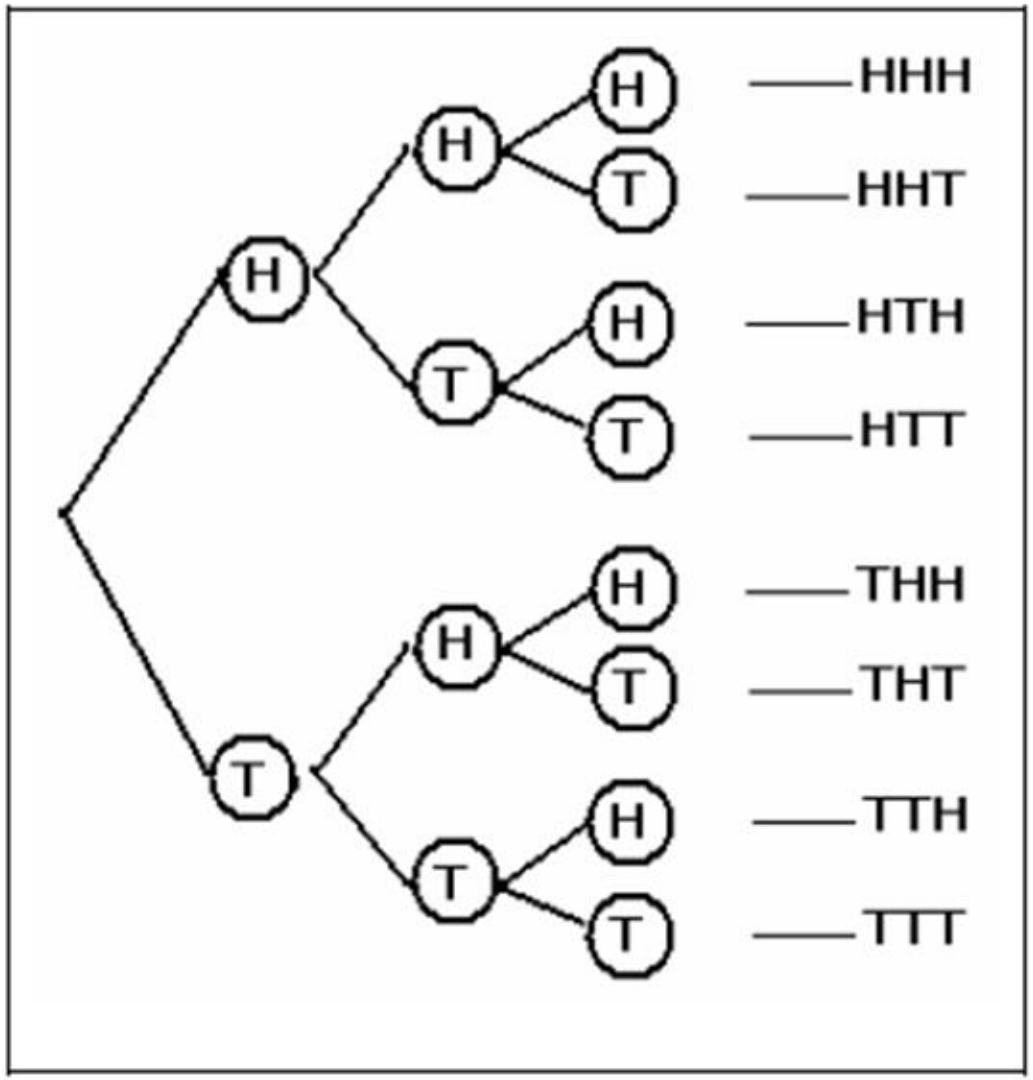
B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

٣. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$$A\cap B,\ A\cup C,\ A^c\cup B^c,\ (A\cap B)^c,\ A\cap B^c$$

الحل:



١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

٢.

$$A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$$
$$n(A) = 4$$
$$B=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$$
$$n(B) = 7$$
$$C=\{(T,H,H),(T,T,H)\}$$
$$n(C) = 2$$

.٣

$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$

$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$

$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$

$A^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

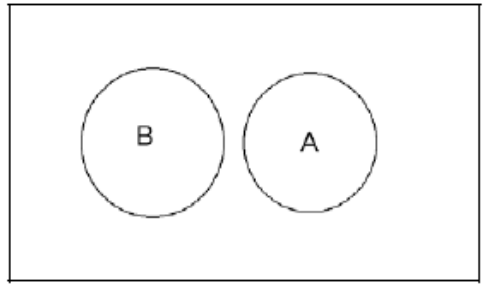
$B^C = \{(T,T,T)\}$

- $A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$;
  $n(A\cap B) = 4$
- $A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\}$;
  $n(A\cup C)=6$
- $A^C \cup B^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$
  $= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n(A^C \cup B^C) = 4$
- $(A \cap B)^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n((A \cap B)^C) = 4$
- $A\cap B^C = A - B = \phi$;
  $n(A\cap B^C) = 0$

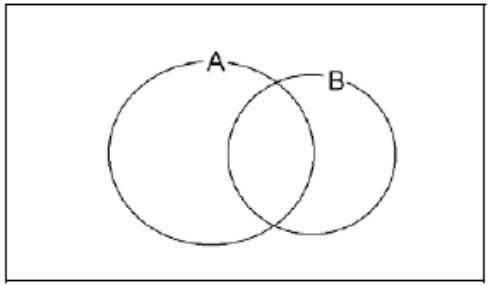
الحوادث المتنافية (المنفصلة): Disjoint (Mutually Exclusive) Events

يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A\cap B=\phi$.

وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معًا أي يستحيل وقوعهما معًا. ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



حادثتان متنافيتان $A\cap B=\phi$



حادثتان غير متنافيتين $A\cap B\neq\phi$

الحوادث الشاملة: Exhaustive Events

يقال بأن الحوادث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحـــده منهـــا) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

١. الحادثتان $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,3,5\}$ حادثتان:

- متنافيتان لأن: $A\cap B=\phi$.
- شاملتان لأن: $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S$.

٢. الحوادث $A_1=\{1,2,3\}$ و $A_2=\{2,3,4\}$ و $A_3=\{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص: Equally Likely Outcomes:

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة. فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T). وكذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصة ظهور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6. وعليه فإن كلا التجربتين المذكرتين متساوية الفرص.

الحالات المواتية للحادثة:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

التعريف التقليدي للاحتمال: Classical Definition of Probability

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي $n(S)$ فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة A}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة S}}$$

مثال ٤-٦ اوجد احتمال الحوادث لتجربة رمي النرد لمر واحدة كما في المثال ٤-٣ السابق .

الحل:

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=6 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{2, 4, 6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$B = \{1, 3, 5\}$	$n(B) = 3$	$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$n(C) = 5$	$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 = 0.8333$
$D = \{6\}$	$n(D) = 1$	$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 = 0.1667$
$\phi = \{\ \}$	$n(\phi) = 0$	$P(\phi) = n(\phi)/n(S) = 0/6 = 0.0$
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0$

مثال ٤-٧

احسب احتمالات الحوادث في مثال ٤-٤ لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين:

الحل:

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة n(S)=4 محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
A = {(H,H),(H,T)}	n(A) = 2	P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 =0.5
B = {(T,H),(T,T)}	n(B) = 2	P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 =0.5
C = {(H,H),(H,T),(T,H)}	n(C) = 3	P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 =0.75